## REPRESENTACIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $\mathbf{f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2-1}}$

### 1. DOMINIO, CONTINUIDAD, PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.

- $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, luego D(f) = **R** – {-1, 1}.
- f(x) es continua en su dominio por ser cociente de funciones continuas.
- Cortes con el eje OX: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x^2}{x^2-1}=0 \Rightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$
- Cortes con el eje OY: $f(0)=\dfrac{2-0^2}{0^2-1}=-2$

### 2. SIMETRÍAS Y PERIODICIDAD

- $f(-x)=\dfrac{2-(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{2-x^2}{x^2-1}=f(x)$
- Luego f(-x) = f(x) y la función es par (simétrica respecto del eje OY).
- No es periódica por ser una fracción algebraica.

### 3. RAMAS INFINITAS Y ASÍNTOTAS.

- Horizontales:

  Por ser f(x) un cociente de polinomios de igual grado, los límites siguientes son los cocientes de los coeficientes de $x^2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow y=-1 \text{ asíntota horizontal}$$

  Además,

$$f(x)-(-1)=\frac{2-x^2}{x^2-1}-(-1)=\frac{1}{x^2-1}.$$

  $\dfrac{1}{x^2-1}>0 \quad si \quad x^2-1>0$, es decir, cuando x>1 o x<-1.

  Por tanto, la gráfica está por encima de la asíntota.

- Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2-x^2}{(x+1)(x-1)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2-x^2}{(x+1)(x-1)}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=-1 \text{ A.V.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-x^2}{(x+1)(x-1)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2-x^2}{(x+1)(x-1)}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=1 \text{ A.V.}$$

### 4. MONOTONÍA

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2-1)-(2-x^2)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^3+2x-4x+2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Puntos de discontinuidad para f '(x): x = -1; x = 1

| | (-∞, -1) | (-1, 0) | (0, 1) | (1, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| Signo de f'(x) | f'(-2) > 0 | f'(-1/2) > 0 | f'(1/2) < 0 | f'(2) < 0 |
| f(x) | creciente | creciente | decreciente | decreciente |

Como f(x) es creciente por la izquierda de 0 y decreciente por la derecha, en x = 0 hay un máximo relativo. Punto (0, -2).

**5. CURVATURA**

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-1\right)^2-(-2x)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(6x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$f''(x) \neq 0 \ \forall x$

Puntos de discontinuidad para f ''(x): x = -1; x = 1

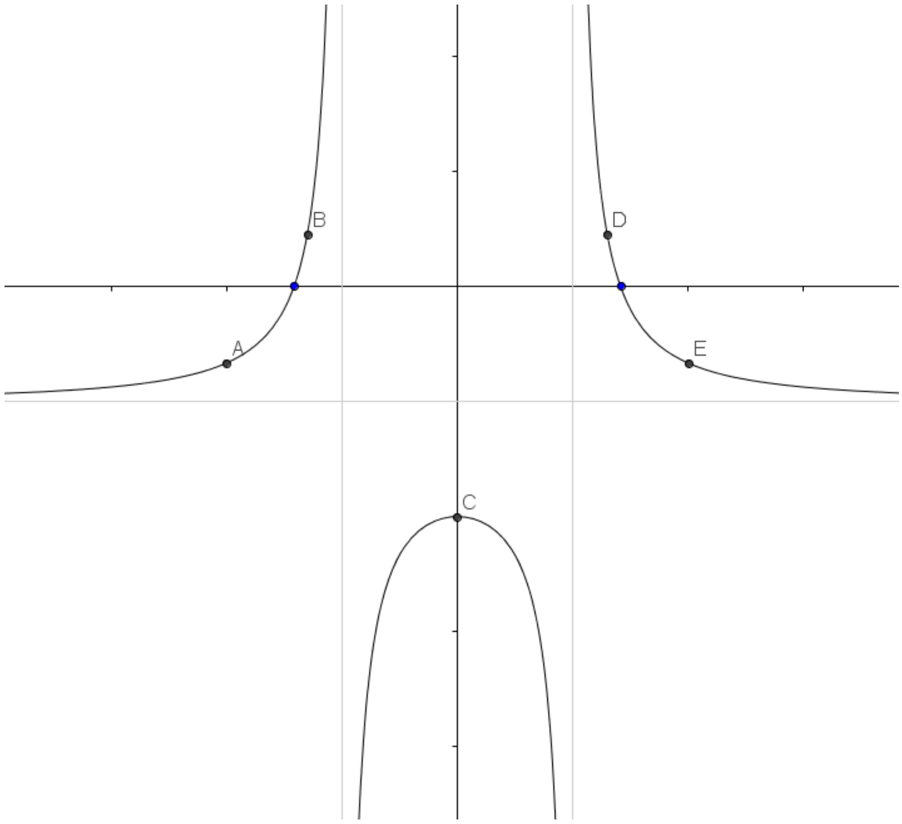
| | (-∞, -1) | (-1, 1) | (1, ∞) |
|---|---|---|---|
| Signo de f''(x) | f''(-2) > 0 | f''(0) < 0 | f''(2) > 0 |
| f(x) | convexa | cóncava | convexa |

No tiene puntos de inflexión por no estar definida la función en los puntos con cambio de curvatura.

## *Resumen:*

- Dom(f) = R – {-1, 1} y f(x) continua en Dom(f).
- Asíntotas
  - y = -1 asíntota horizontal (la curva se acerca por encima de la asíntota)
  - x = -1 asíntota vertical (izquierda: +∞; derecha: -∞)
  - x = 1 asíntota vertical (izquierda: -∞; derecha: +∞)
- Monotonía:
  $f(x)$ *creciente en* $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
  $f(x)$ *decreciente en* $(0,1)\cup(1,\infty)$
- En x = 0 hay un máximo relativo. Punto (0, -2)
- Curvatura
  $f(x)$ *es convexa en* $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
  $f(x)$ *es cóncava en* $(-1,1)$
- No tiene puntos de inflexión.
- Tabla de valores:

| **x** | -2 | $-\sqrt{2}$ | -1,3 | 0 | 1,3 | $\sqrt{2}$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | -0,67 | 0 | 0,45 | -2 | 0,45 | 0 | -0.67 |


A
B
C
D
E