INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES
(CON DENOMINADOR DE GRADO NO MAYOR QUE DOS)

Se trata de integrar funciones del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con P(x) y Q(x) polinomios y siendo el grado de Q(x) no mayor que dos.

Pasos:

1. Se pone el coeficiente principal del denominador a uno.

   Ejemplo: $\int \frac{dx}{2x-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2}$

2. Si $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, se dividen para obtener: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

   Ejemplo: $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = (*) = \int x+1+\frac{2}{x-1}dx = \frac{x^2}{2}+x+2\int \frac{dx}{x-1}$

   (*) Se divide x^2 +1 entre x – 1. El cociente resulta ser x + 1 y el resto 2.

3. Se comprueba si fuese una forma potencial, neperiana o arcotangente.

   Ejemplos:

   a) $\int \frac{1}{(x-5)^2}dx = \int (x-5)^{-2}dx = \frac{(x-5)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{x-5}+c$

   b) $\int \frac{6x+9}{x^2+3x-1}dx = 3\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}dx = 3\ln|x^2+3x-1|+c$

   c) $\int \frac{4}{1+x^2}dx = 4arctgx + c$

4. Se obtienen las raíces de Q(x), reales o complejas. Se tienen entonces cuatro casos.

- **Raíces reales simples:** $Q(x) = (x-a)(x-b)$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x-2}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{x-2}{(x+1)(x-3)}dx = (*) = \int \frac{3/4}{x+1}dx + \int \frac{1/4}{x-3}dx = \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + c =$$

$$= \frac{\ln|(x+1)^3(x-3)|}{4} + c$$

$$(*)\frac{x-2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ -2 = -3A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- **Raíces reales múltiples**: $Q(x)=(x-a)^2$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$$

Ejemplo:

$$\int\frac{x-2}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{x-2}{(x+1)^2}dx=(*)=\int\frac{1}{x+1}dx-3\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+c$$

$$(*)\ \frac{x-2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}1=A\\-2=A+B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-3\end{cases}$$

- **Raíces complejas I:** $\int\frac{dx}{x^2+bx+c}$ con $b^2-4c<0$

Si $\alpha\pm\beta i$ son las raíces se puede poner $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2+\beta^2$. Entonces

$$\int\frac{dx}{x^2+bx+c}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\int\frac{1/\beta}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}dx=\frac{1}{\beta}\text{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Ejemplo:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=(*)=\int\frac{dx}{(x-2)^2+3^2}=(**)=\frac{1}{3}\int\frac{1/3}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

$$(*)\ Si\ x^2-4x+13=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=3\end{cases}$$

(**) Se *apaña* para que quede una arcotangente: se divide entre 3^2 para que quede $(algo)^2+1$; se mete el 3 en el cuadrado y se saca 1/3 para que en el numerador quede 1/3, que es la derivada del *algo*.

- **Raíces complejas II:** $\int\frac{mx+n}{x^2+bx+c}dx$ con $b^2-4c<0$

Se descompone la integral en otras dos, de modo que la primera sea un neperiano y la segunda una integral del tipo anterior, es decir: $mx+n=A(2x+b)+B$.

Ejemplo:

$$\int\frac{4x-2}{x^2-4x+13}dx=(*)=\int\frac{2(2x-4)+6}{x^2-4x+13}dx=2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+6\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=$$

$$=(**)=2\ln|x^2-4x+13|-6\cdot\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-2}{3}\right)+c=2\ln|x^2-4x+13|-2arctg\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

(*) Como necesitamos tener en el numerador la derivada del denominador, que es 2x - 4, y arriba tenemos 4x, hay que poner 2(2x - 4). Al desarrollar este último producto quedaría 4x - 8 y no 4x - 2, por lo que sumamos 6 para compensar.

(**) La primera integral es un neperiano, que es lo que se buscaba. Para la segunda, ver el caso anterior, *raíces complejas I*.