

# Cálculo de límites de funciones

## 1. Límites cuando x tiende a infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

1.1. Potencias:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$

1.2. Exponenciales:  $\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \\ \text{no existe} & \text{si } k < 0 \end{cases}$

1.3. Polinomios:  $\pm \infty$  según sea el signo del coeficiente principal.

1.4. Cociente de polinomios:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + \dots}{b_p x^p + \dots} = \begin{cases} \pm \infty & \text{si } k > p \text{ (signo de } a_k / b_p) \\ 0 & \text{si } k < p \\ a_k / b_p & \text{si } k = p \end{cases}$

## 2. Límites cuando x tiende a menos infinito: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2.1. Se realiza el cambio siguiente:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ .

2.2. Es decir: se sustituye x por  $-x$  y se calcula el límite en más infinito.

## 3. Operaciones con límites:

3.1. El límite de una suma de funciones es la suma de los límites de cada función por separado.

3.2. Lo mismo ocurre para las operaciones de resta, producto, cociente, raíz, logaritmo o potencia, salvo indeterminaciones.

#### 4. Indeterminaciones:

4.1.  $\frac{\infty}{\infty}$ .

4.1.1. Cocientes de polinomios: ver punto 1.4.

4.1.2. Raíces de polinomios. Se divide numerador y denominador por la potencia de mayor grado (teniendo en cuenta el índice de las raíces).

4.2.  $\infty - \infty$ .

4.2.1. Diferencia de fracciones algebraicas: se realiza la operación y se vuelve a calcular el límite.

4.2.2. Diferencia de raíces: se multiplica y se divide por el conjugado. A veces surgirá una nueva indeterminación que habrá que resolver a su vez.

4.3.  $1^\infty$

4.3.1. Si  $f(x)$  tiende a 1 y  $g(x)$  tiende a infinito, se aplica la fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)}.$$

4.3.2. La fórmula anterior vale tanto para límites en el infinito como para límites en un punto.

4.4.  $f(x)^{g(x)}$

4.4.1. Si el límite de una función potencial-exponencial da una indeterminación distinta de  $1^\infty$  puede probarse lo siguiente:  $\lim (f(x))^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln(f(x))}$

#### 5. Límites en un punto: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

5.1. Primero se sustituye la variable por el valor al que tiende. Si el resultado es un número real, ese es el límite.

#### 5.2. 0/0

5.2.1. Cociente de polinomios: se factorizan numerador y denominador y se simplifican los factores iguales.

#### 5.3. k/0

5.3.1. Se calculan los límites laterales (si el denominador es un polinomio, conviene factorizarlo):  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

5.3.2. Cada uno de los límites laterales será  $+\infty$  si el signo de  $k$  coincide con el signo de los valores del denominador al acercarse a cero, y  $-\infty$  si no coinciden.

5.4. **Funciones a trozos:** en las funciones definidas a trozos será necesario calcular los límites laterales al menos en los valores donde cambie la definición de la función.