Sí que sabemos hacer raíces cuadradas, ... y más

Uno de los algoritmos más desdeñados de los aprendidos en la escuela es el del cálculo de la raíz cuadrada. La mayoría lo olvida al llegar a la edad adulta (incluso antes). ¿Cuál puede ser la razón de tan *infructuoso* aprendizaje? Quizás radique en su oscura presentación, seguramente ausente de explicación alguna. Hoy pretendemos acabar con este estigma.

Empecemos por las raíces cuadradas de un entero (no negativo), por ejemplo del 21316 (que es el cuadrado de 146). El algoritmo de la escuela es el siguiente:

a) Se **separa** el número, de derecha a izquierda, **de dos en dos** cifras: 2-13-16. Se tienen, en este caso, 3 grupos.

b) Se empieza la raíz, **buscando** un número que al cuadrado se acerque lo más posible, sin pasarse, al primer grupo: $1^2 = 1 \leq 2$ mientras que $2^2 = 4 > 2$. **Apuntamos** este número, 1, que será la primera cifra del resultado final.

c) Se **quita** a 2 el cuadrado de dicho número: $2 - 1 = 1$.

d) Se **baja** el siguiente grupo, 13, para acompañar a este **resto**: 113.

e) Ahora empieza una oscura operación: se multiplica por 2 lo que llevamos apuntado como resultado: $2 \times 1 = 2$, y, en otra línea, se plantea la **búsqueda** de un número, digamos b, que puesto en el hueco $2\_ \times \_$, se ajuste lo más posible, sin pasarse, a 113: $2\underline{4} \times \underline{4} = 96 \leq 113 < 2\underline{5} \times \underline{5} = 125$; **apuntamos** 4 como segunda cifra del resultado final: 14.

f) **Restamos** a 113 el 96 que salía de 24×4: $113 - 96 = 17$.

g) Se **baja** el siguiente grupo, 16, para acompañar a este **resto**: 1716.

h) Se **repite** desde e) con los nuevos *protagonistas*: $2 \times 14 = 28$; $28\underline{b} \times \underline{b}$ lo más próximo a 1716 se consigue con $b = 6$ ($28\underline{6} \times \underline{6} = 1716$). Así, el resultado final es 146.

Vamos a *profesionalizar* este algoritmo, después desentrañaremos su *misterio*. Antes, observemos que, si pensamos en que el resultado final lo podemos empezar (primera cifra ficticia) por 0, los pasos b, c, d son como los pasos e, f, g: $2 \times 0 = 0$; $0\underline{b} \times \underline{b} = b^2$, ... Tomamos, para explicar el algoritmo, de nuevo $21316 = 146^2$.

0. **Descomponemos** el número en base 100 ($= 10^2$): $2 \cdot 100^2 + 13 \cdot 100 + 16$. Se consiguen los correspondientes grupos de **dos en dos** cifras (el primero puede ser de una sola cifra).

1. **Iniciamos** con valor 0, dos variables, el que será el resultado final, llamémosle raiz, y el número al que nos queremos aproximar, sin pasarnos, con la operación de *elevar al cuadrado*, digamos resto: raiz=0 y resto=0.

2. (**Bucle**) Para cada grupo de *dos* cifras del paso 0, tomados de izquierda a derecha:

   a) Se **actualiza** resto con resto $\cdot$ 100+ las *dos* cifras correspondientes.

   b) Se **busca** b tal que $b \cdot (2 \cdot \mathrm{raiz} \cdot 10 + b)$ se ajuste lo más posible, sin pasarse, a resto.

   c) Se **actualizan** raiz a $\mathrm{raiz} \cdot 10 + b$; y resto con $\mathrm{resto} - b \cdot (2 \cdot \mathrm{raiz} \cdot 10 + b)$

Veamos los diferentes valores de resto y raiz en el desarrollo del paso 2 para el número escogido. Recordar que ambas se inician a 0:

resto=0∗100+2=2	resto=1∗100+13=113	resto=17∗100+16=1716
∗∗encontramos b=1	∗∗encontramos b=4	∗∗encontramos b=6
∗ pues 1∗(2∗0∗10+1)=1<=2	∗ pues 4∗(2∗1∗10+4)=96<=113	∗ pues 6∗(2∗14∗10+6)=1716<=1716
∗ y 2∗(2∗0∗10+2)=4>2	∗ y 5∗(2∗1∗10+5)=125>113	∗ y 7∗(2∗14∗10+7)=2009>1716
raiz=0∗10+1=0+1=1	raiz=1∗10+4=14	raiz=14∗10+6=146
resto=2−1=1	resto=113−96=17	resto=1716−1716=0

Como cabía esperar, hemos obtenido que la raíz cuadrada, en este caso exacta (resto = 0), de 1716 es raiz = 146. Si la raíz no fuera exacta, podemos proseguir el algoritmo, bajando ceros de *dos en dos*, para ir extrayendo decimales. Esto es equivalente a considerar el número inicial multiplicado por 10^{2d}, con d el número de decimales a extraer, y al acabar el algoritmo anterior, tomar $\mathrm{raiz}/10^d$. Si quisiéramos, por ejemplo, calcular la raíz cuadrada de 5 con tres decimales, bastaría aplicar el algoritmo a $5 \cdot 10^6$ y al resultado, 2236, dividirlo por 10^3, quedando: $\sqrt{5} = 2.236\ldots$

Llegados a este punto ya se puede resolver el siguiente ejercicio. Puede venir bien aguantar unos minutos más de lectura (la que sigue al enunciado del ejercicio) para aclarar, sobre todo, el misterioso papel del paso 2*b*).[1]

[1] Los demás se entenderán al explicar este.

Ejercicio de programación

I.- (Paso 0 del algoritmo) Definir una función de Sage, `deAdos(M)`, que espere un número entero, `M`, y devuelva una lista resultado de dividirlo, de derecha a izquierda, en números de dos cifras (el primer elemento de la lista puede ser de una cifra). Por ejemplo, `deAdos(21316)` debería devolver la lista [2,13,16].

II.- (Optativo, pero fácil y recomendable) Definir una función de Sage, `Poli(p,q)`, que, dados dos naturales, `p` y `q`, devuelva `q*(2*p*10+q)`. Por ejemplo, `Poli(1,4)` devolvería 96; `Poli(1,5)`, 125; `Poli(14,7)`, 2009; ...

III.- (Paso 2b del algoritmo) Definir una función de Sage, `encuentrab(s,t)` que, dados dos naturales, `s` y `t`, encuentre y devuelva, el primer valor de `b` entre `9, 8, 7, ..., 2, 1, 0`, tal que `b*(2*s*10+b)`≤`t`. Por ejemplo, `encuentrab(1,113)` devolvería 4; `encuentrab(14,1716)`, 6; ... (*Sugerencia:* `Poli(s,b)` es ...)

IV.- (Algoritmo completo) Definir una función `Raiz(M,d=0)` que, dados un natural `M`, y, de manera optativa, un número, `d`, de decimales (0 por defecto) devuelva, realizando los pasos del algoritmo *profesionalizado* para el cálculo de raíces cuadradas, la raíz cuadrada de `M` con sus primeros `d` decimales. Por ejemplo, `Raiz(5,3)` debería devolver 2.236.

Binomio de Newton al rescate. Escribamos el desarrollo de $(a+b)^2$ como

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$$

de donde, es claro que si conocemos $(a+b)^2$ y a^2, podremos encontrar b: $b(2a+b) = (a+b)^2 - a^2$. Este es todo el misterio del algoritmo. Solo hay que tener en cuenta que en este vamos encontrando las cifras de una en una, digamos $b_1 b_2 b_3$..., pero recomponer un número a partir de sus cifras es sencillo: $25 = 2 \cdot 10 + 5$; $143 = (1 \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 3$; ... Y, análogamente, al elevar al cuadrado, cada cifra da lugar a, a lo más, dos cifras: *si M tiene k cifras, es decir $10^k \le M < 10^{k+1}$, entonces M^2 tiene $2k$ o $2k+1$ cifras, $10^{2k} \le M^2 < 10^{2k+2}$.* Escribimos, sin más literatura, una última observación sobre el uso de $(a+b)^2$:

$$\begin{aligned} 146^2 = (14 \cdot 10 + 6)^2 &= 14^2 \cdot 10^2 + 6 \cdot (2 \cdot 14 \cdot 10 + 6) \\ &= (1 \cdot 10 + 4)^2 \cdot 10^2 + 6 \cdot (2 \cdot 14 \cdot 10 + 6) \\ &= (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 10 + 4)) \cdot 10^2 + 6 \cdot (2 \cdot 14 \cdot 10 + 6) \\ &= 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 10 + 4) \cdot 10^2 + 6 \cdot (2 \cdot 14 \cdot 10 + 6) \end{aligned}$$

y esperamos que esto lo deje todo claro.

Por supuesto, este algoritmo se puede generalizar para el cálculo de raíces de cualquier índice: cúbicas, cuartas, quintas, ... Solo hay que tomar el binomio de Newton con la potencia adecuada, y averiguar el sustituto de $2a\underline{b} \times \underline{b}$.

0. **Descomponemos** el número en base 10^m. Se consiguen los correspondientes números de m cifras (el primero puede ser de menos cifras).

1. **Iniciamos** con valor 0, dos variables, el que será el resultado final, llamémosle a, y el número al que queremos aproximar con la operación $(\mathrm{a} \cdot 10 + b)^m - \mathrm{a}^m \cdot 10^m$, digamos resto: a=0 y resto=0.

2. (**Bucle**) Para cada número de `m` cifras del paso 0, tomados de izquierda a derecha:

   a) Se **actualiza** resto con resto $\cdot\, 10^m +$ el número de `m` cifras correspondiente.

   b) Se **busca** b tal que $(\mathrm{a} \cdot 10 + b)^m - \mathrm{a}^m \cdot 10^m$ se ajuste lo más posible, sin pasarse, a resto.

   c) Se **actualizan** a con el valor $\mathrm{a} \cdot 10^m + b$; y resto con resto $- ((\mathrm{a} \cdot 10 + b)^m - \mathrm{a}^m \cdot 10^m)$

El enunciado del ejercicio podría haber aparecido en esta manera alternativa:

Ejercicio* (Raíces m-ésimas)

I.- (Paso 0 del algoritmo) Definir una función de Sage, `deAm(M,m)`, que espere dos naturales, `M` y `m`, y devuelva una lista resultado de dividir `M`, de derecha a izquierda, en números de `m` cifras (el primer elemento de la lista puede ser de menos de `m` cifras). Por ejemplo, `deAm(3421316,3)` debería devolver la lista [3,421,316].

II.- Definir una función de Sage, `Polim(p,q,m)`, que, dados tres naturales, `p`, `q` y `m`, devuelva $(p \cdot 10 + q)^m - p^m \cdot 10^m$. Por ejemplo, `Polim(1,4,2)` devolvería 96; `Polim(2,5,3)`, 7625; ...

III.- (Paso 2b del algoritmo) Definir una función de Sage, `encuentrabm(s,t,m)` que, dados tres naturales, `s`, `t` y `m`, encuentre y devuelva, el primer valor de `b` entre `9, 8, 7, ..., 2, 1, 0`, tal que `Polim(s,b,m)`≤`t`. Por ejemplo, `encuentrabm(1,113,2)` devolvería 4; ...

IV.- (Algoritmo completo para la raíz m-ésima) Definir una función `Raizm(M,m,d=0)` que, dados un natural `M`, un índice para la raíz `m`, y, de manera optativa, un número `d`, de decimales (0 por defecto) devuelva, con sus primeros `d` decimales y siguiendo los pasos del algoritmo para el cálculo de raíces m-ésimas, la raíz de índice `m` del natural `M`. Por ejemplo, `Raizm(5,2,3)` debería devolver 2.236.