

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Se trata de integrar funciones del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

□ Pasos:

1. Se pone el coeficiente principal del denominador a uno.

2. Si $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, se dividen para obtener: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

$$\text{Ejm: } \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx = \int x + 1 + \frac{2}{x - 1} dx$$

3. Comprobar si fuese una forma potencial, neperiana o arcotangente.

$$\text{Ejm: } \int \frac{9x^2 + 6}{x^3 + 2x - 1} dx = 3 \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 1} dx = 3 \ln|x^3 + 2x - 1| + c$$

4. Se descompone $Q(x)$ en factores para obtener las raíces reales simples, las múltiples y las raíces imaginarias simples.

□ Raíces reales simples: $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Ejm:

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 3)} dx = \downarrow = \int \frac{3/4}{x + 1} dx + \int \frac{1/4}{x - 3} dx = \frac{3}{4} \ln|x + 1| + \frac{1}{4} \ln|x - 3| + c$$

$$\frac{x - 2}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{(x + 1)(x - 3)} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ -2 = -3A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

□ Raíces reales múltiples: $Q(x) = (x - a)^n$

$$\frac{P(x)}{(x - a)^n} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

Ejm:

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x - 2}{(x + 1)^2} dx = \downarrow = \int \frac{1}{x + 1} dx - 3 \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \ln|x + 1| + \frac{3}{x + 1} + c$$

$$\frac{x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{Ax + A + B}{(x + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A \\ -2 = A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$

□ **Raíces complejas conjugadas:** $\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}$ con $b^2 - 4c < 0$

Si $\alpha \pm \beta i$ son las raíces se puede poner $x^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 + \beta^2$. Entonces

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \int \frac{1/\beta}{\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)$$

$$\text{Ejm: } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1/3}{\left(\frac{x - 2}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 2}{3}\right) + c$$

□ **Raíces complejas conjugadas:** $\int \frac{mx + n}{x^2 + bx + c} dx$ con $b^2 - 4c < 0$

Se descompone la integral en otras dos, de modo que la primera sea un logaritmo neperiano y la segunda una integral del tipo anterior: $mx + n = A(2x + b) + B$.

□ **Mezclas.**

$$\text{Ejm: } \int \frac{5x + 4}{(x - 1)(x + 2)^2} dx$$

$$\frac{5x + 4}{(x - 1)(x + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2} \Rightarrow A = -1; B = -1; C = 2$$